フェルマ曲線の安定退化とその応用について

AUTHOR(S):
前田, 博信

CITATION:
前田, 博信. フェルマ曲線の安定退化とその応用について. 代数幾何学シンポジューム記録 1987, 1987: 283-295

ISSUE DATE:
1987

URL:
http://hdl.handle.net/2433/212660

代数幾何学シンポジウム記録
1987年度 pp.283-295

フェルマ曲線の安定退化とその応用について

学習院大学·理 前田博信

§1 序

代数体 K 上で定義された非特異、完備、絶対既約な代数曲線 C は K の整数環 O_K 上にひろげて曲面にすることができる。すなわち連結、正則な2次元のスキーム X と固有平坦射 $\pi: X \longrightarrow B = \mathrm{Spec}(O_K)$ であって $X \times_{O_K} K \simeq C$ となるものが(少なくとも1つ)存在する。blowing down をくり返して、更に $X \to B$ は極小、即ち X には第一種例外曲線が存在しない、としてよい[1]。 C の種数 $g(C)$ が $g(C) \geq 1$ なら極小な X は一意的に定まり、$g(C)=0$ なら X と双有理同値な極小モデルは可算無限個存在し互にエレメンタリー変換でうつりあっている。

1942年の論文[2]で M. Deuring は一般の $\mathfrak{p} \in \{B$の閉点$\}$ に対して、π の $\mathfrak{p}$ 上のファイバー $X_{\mathfrak{p}}$ が $\kappa(\mathfrak{p}) = O_K/\mathfrak{p}$ 上絶対既約で正則な代数曲線となること、即ち X が $\mathfrak{p}$ で good reduction をもつという M. Eichler の主張を

1) I. Shafarevich, Lectures on Minimal Models ..., Tata Lecture Notes 37, 1966

2) M. Deuring, Reduktion algebraischer Funktionenkörper ..., Math. Zeitschr. 47, 1942, 643-654.

証明した。この論文にはこのような易しい事実は既にOstrowskiやE.Noetherは知っていたに違いないと書いてある。一方、Xのgoodでないreduction、つまりbad reductionについての考察については H. Hasse が1954年の論文[3]で整数論における重要な問題として研究を奨励しているがHasseは C_s (後出)のconductorを計算したにとどまった。

bad reductionの様子が明らかになるのは小平による複素楕円曲面の研究(1963)やNéronの仕事(1964)に始まると思われる。一方、1962年にShafarevichはストックホルムのICM(国際数学者会議)でフェルマ楕円曲線、即ち $x^3+y^3=1$、は $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{4},\sqrt{-3})$ まで持ちあげてやると、どこにもbad reductionのないモデルが存在することを示した[4]。

60年代からbad reductionの研究が盛んになった。M. Raynaudの研究によりNéronの極小モデルがよく理解され、A.Grothendieckはアーベル多様体がgood reductionをもつためのNéron-Ogg-Shafarevich判定法を一般化し、アーベル多様体に対する安定還元定理を証明した[5]。1969年にはP. DeligneとD. Mumfordが代数曲線 C/K の安定還元定理を定式化し、Cのreductionがstableであることと Cのヤコビ多様体 $Jac(C)$ のreductionがstableであることが同値であることを証明した[6]。

3) H. Hasse, Zetafunktionen und L-Funktionen …, 全集第2巻, 450 − 515.

4) I. Shafarevich, Algebraic Number Fields, Proc. ICM, Stockholm 1962, 163 − 176.

5) A. Grothendieck, ed., SGA 7 I, Lect. Notes in Math. 288, Springer

6) P. Deligne and D. Mumford, The irreducibility of …, Publ. Math. IHES, 36, 1969, 75-110.

このことを用いて 種数 $g \geq 2$ の安定曲線の (coarse) moduli scheme $\overline{\mathcal{M}}_g/\mathbb{Z}$ を得る. $\overline{\mathcal{M}}_g$ は $\mathbb{Z}$ 上 projective であるから 代数体上で定義された代数曲線 C がかってに1つ与えられたら 各素数 p に対し C の p 上での stable reduction が一意的に定まる. これを具体的に求めることが問題となる. この問題は代数幾何学のみならず整数論の分野で多くの応用のあることが、最近の研究によって明らかになっている.

この小論では C として フェルマ曲線 $F^n; x^n+y^n=1\ /\mathbb{Q}$, 並びに フェルマ商曲線 $F^n_{a,b,c}$; $y^n=(-1)^c x^a(1-x)^b\ /\mathbb{Q}$, $a+b+c=0$, について得られた結果を紹介したい. なお F^p ($p \geq 3$ が素数) については Maeda[7), $F^n_{a,b,c}$ (n は一般) については Coleman と McCallum[8) による.

§2. 安定退化の一般論

記号は慣用に従う. K は代数体、K の整数環を $\mathcal{O}_K$, $B=\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$, K の有限素点 (= B の閉点) を $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ 等で表わす. $\mathfrak{K}$ を K を定数体とする一変数代数函数体、つまり $\mathfrak{K}$ は K 上有限生成で $\mathrm{tr.deg}_K \mathfrak{K} = 1$ かつ、K は $\mathfrak{K}$ 内で代数的閉とする.(別名、混標数の2次元大域体). $\mathfrak{K}/K$ のモデルの中から非特異完備、絶対既約な代数曲線 C/K を選び、C/K の極小モデル $X \xrightarrow{\pi} B$ を選ぶ. π には特異ファイバーがあるのが普通である. 例えば $K=\mathbb{Q}$ のとき、$\mathbb{Z}$ 上いたる所 good reduction をもつアーベル多様体は存在しないことが知られているから、$\mathbb{Z}$ 上で

7) H. Maeda, Die stabile Reduktion der Fermatkurve ..., manuscripta 56, 1986, 333-342.

8). W. McCallum and R. Coleman, Stable Reduction of Fermat ··, Crelle に出る予定.

singular fibre を一つももたない $C/\mathbb{Q}$, $g(C)\geq 1$, は存在しない.[9]

G. Faltings によって証明された Shafarevich 予想によれば[10], "B上の有限個の素点の集合をSとし、高々S上でのみ bad reduction をする K上の代数曲線の K-同型類はその種数 $g\ (\geq 2)$ を固定すると高々有限個しか存在しない" のであるから π の特異ファイバーの様子が分かることと、C/K が分かることは "ほとんど" 同値であるといってよいであろう. という訳で特異ファイバーに注目したい.

特異ファイバーといってもその種類は豊富で種数 g が大きくなると非常に増える. しかも素点 $\mathfrak{p}$ の標数 p が $p<2g+2$ のときが難しい. しかし、半安定（後出）な特異ファイバーに限るとその様子は比較的よく分かる. 一般の C/K に対して K の適当な有限次拡大体 (Galoisにとれる) L をとれば $C_L = C\times_K L$ は高々半安定な特異ファイバーをもつようにできる（安定還元定理）から K上で C を知ることは L上の C_L と、拡大 L/K との関係（具体的には $Gal(L/K)$ の $\mathfrak{p}$-惰性群の C_L への作用）を知ることに帰着される. このような視点に立った、但し $p>2g+2$ のときの、特異ファイバーの研究が西独マンハイム大学の Popp 教授の助手であった E. Viehweg の学位論文である.[11] このアイデアは後に base space が高次元の場合に拡張され、飯高式分類理論における加法予想 $C_{n,n-1}$ の証明に用いられた.

9) J-M. Fontaine, Il n'y a pas de variété abélienne sur $\mathbb{Z}$, inventiones 81, 1985, 515-538

10) G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten ..., inventiones 73, 1983, 349-366.

11) E. Viehweg, Invarianten der degenerierten .., Journal für Math., 293/294, 1977, 284-308.

以下 $g(C)\geqq 1$ とする. C/k の極小モデル $\pi: X\to B$ が $\mathfrak{p}$ で bad reduction をもつとして今 $X_{\mathfrak{p}}$ のみに注目したい. K の $\mathfrak{p}$ での完備化 $K_{\mathfrak{p}}$ は局所体、即ち剰余体が有限体、であるから $K_{\mathfrak{p}}$ の最大不分岐拡大 $K_{\mathfrak{p}}^{ur}$ へ基底変換をして B は剰余体が代数的閉体となる完備離散付値環の Spec としてよい.

C/k の極小モデル $\pi: X\to B$ が半安定 (semi-stable) であるとは π の各幾何学的ファイバーが被約で、各既約成分は高々通常2重点の特異性をもち、それらの交点も通常2重点となっているものをいう. ファイバーの既約成分に非特異有理曲線 $E\simeq \mathbb{P}^1$ がある場合は X の極小性から $E^2\leqq -2$ であるが, $E^2=-2$ となる $\mathbb{P}^1$ の連結成分は A_n 型の有理2重点の最小特異点解消の例外集合となっている. これらをすべて blowing down して $\pi': X'\to B$ を得る: X' には A_n 型の有理2重点があるが π' の各幾何学的ファイバーはすべて安定 (stable) である. 即ち各ファイバーは高々通常2重点を特異性にもち、その成分に非特異有理曲線がある場合はその上に少なくとも3つの特異点があるものとする. 2次元では特異点解消には最小のものが定まるから安定モデル (X' のこと) を考えることと半安定モデル (X のこと) を考えることは同値である.

但し基底変換に関しては事情が異なる. 安定モデルは "本当に安定" であるが半安定モデルは2重点のところで形が変わってしまう. 局所環で述べると $R[[u,v]]/(uv-\pi)$ (π は R の素元) が基底変換 $\pi=\pi'^n$ で $R'[[u,v]]/(uv-\pi'^n)$ (A_{n-1} 型) となる.

ここから Kは一般の体とする. K上定義された代数曲線 C には ヤコビ多様体 $\mathrm{Jac}(C)$ とよばれるアーベル多様体 と $\mathrm{Jac}(C)$ での平行移動の不定性を除けば 標準的な埋め込み写像 $f: C \to \mathrm{Jac}(C)$ が付随する。$\mathrm{Jac}(C)$ は K上定義されており C に K有理点があれば f も K上定義される.

ここで Néron の極小モデルの復習をしたい.[12] R を離散付値環, L を R の商体、$R/\mathfrak{p} = k$ を剰余体とする. 今のところ k は全く一般の体でよい. A は L上定義されたアーベル多様体とする. このとき次の性質をみたす R上の正則な可換群スキーム $\mathcal{A}$ が存在して、同型を除いて一意である. (i) $\mathcal{A} \times_R L \simeq A$ (ii) R上 smooth な任意のスキーム Y に対して $Y \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_R(Y, \mathcal{A})$ と $Y \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_L(Y \times_R L, A)$ は函手として同値. $\mathcal{A}$ を A/L の Néron モデルという.

$\mathcal{A}/R$ の閉ファイバー A_0 は k上の可換群スキームである. もし A_0 が完備であれば A_0 は k上のアーベル多様体で, このとき A は $\mathfrak{p}$ で good reduction をもつという. もし A_0 の単位元の連結成分 A_0° が準アーベル多様体, 即ち k の適当な拡大体上で A_0° はアーベル多様体を代数的トーラス G_m^r で拡大したものに同型、となっているとき A は $\mathfrak{p}$ で安定還元 (stable reduction) をもつという.

以上の準備の下に Deligne-Mumford 並びに Raynaud の定理を述べることができる.

12) A. Néron, Modèles minimaux des variétés abéliennes ..., IHES N°21, 1964.

まずRは剰余体kが代数的閉体となる完備離散付値環とする。Kを Rの商体とし、CをK上非特異完備絶対既約な代数曲線で$g(C)\geqq 2$とする。このとき

(i) CのR上のreductionがstableであることとJac(C)のreductionがstableであることとは同値。

(ii) $\pi: X \to B$ をC/Kの極小モデルで $X_p = \sum_{i=1}^{n} r_i C_i$ としたとき $\gcd(r_1, \cdots, r_n) = 1$ ならば、Jac(C)のR上のNéronモデルの単位元の連結成分の閉ファイバーは$\mathrm{Pic}^0(X_p)$と同型[13]（X/Bが安定モデルのときは$\mathrm{Pic}^0(X_p)$はX_p/kのgeneralized Jacobianである。$k=\mathbb{C}$ならこれは対数的アルバネーゼ多様体として構成できる）

(iii) A/Kをアーベル多様体とすると ある有限次Galois拡大 K'/Kが存在して（K'はK上完全不分岐で再び完備離散付値体となる）$A \times_K K'$のreductionはstableとできる。

ここで(i)と(iii)を組み合わせれば代数曲線の安定還元定理を得る。

§3 虚数乗法をもつアーベル多様体

代数体Kが総虚であって、ある総実体K^+上の二次拡大となっているときKをCM体という。KがCM体のとき$[K:\mathbb{Q}]=2n$として、n個の無限素点 $\mathrm{Hom}(K, \mathbb{C}) \ni \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ が互いに相異なり、かつ互に複素共役でない、ように選べる。このとき$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$をCM型という。$[K:\mathbb{Q}]=2n$のCM体には丁度$2^n$種類のCM型がある。

---

13) M. Raynaud, Spécialisation du foncteur de Picard, IHES 38 (1970), 27–76.

代表的なCM体は 円分体 $\mathbb{Q}(\mu_N)$, $N\geq 3$ と虚2次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ である. あるいは(複雑な)総実体と適当な虚2次体の合成をとれば一般にアーベル体でないCM体を得ることができる.[14]

体k上定義されたアーベル多様体Aが虚数乗法をもつとは、あるCM体Kで、$[K:\mathbb{Q}]=2\dim A$ かつ $K\to \mathrm{End}_k(A)\otimes\mathbb{Q}$ が単射となるものが存在することをいう. 例えば $k=\mathbb{C}$ のとき、CM体Kに一つのCM型$\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$と一つの分数イデアル$\mathfrak{a}\subset K$が与えられたら、写像 $\Phi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n):K\to\mathbb{C}^n$ による$\mathfrak{a}$の像$\Phi(\mathfrak{a})$は$\mathbb{C}^n$内のlatticeになることが知られていて $\mathbb{C}^n/\Phi(\mathfrak{a})=A$ はKを虚数乗法にもつアーベル多様体(単なる複素トーラスではない!)となる. $\mathfrak{a}$をとりかえるともとのアーベル多様体とisogenyになる. しかしCM型$\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$をとりかえると新しくできたアーベル多様体は性質が全く変わってしまう(例は後ででてくる).

さて、虚数乗法をもつアーベル多様体Aが大域体(つまり代数体又は有限体上の一変数函数体)又は局所体K上定義されている場合はKの巡回拡大上でAはいたる所good reductionをもつようにできる、ことがSerreとTateによって示され[15]、後にF. Oort[16]によりKの剰余体が完全体の場合に拡張された.

14) C-G. Schmidt, Arithmetik Abelscher Varietäten ..., Lect. Notes in Math. 1082, Springer 1984

15) J.-P. Serre and J. Tate, Good reduction of ..., Ann. of Math. 88, 1968, 492-517.

16) F. Oort, Good and stable reduction of ..., manuscripta 11, 1974, 171-197.

§4 フェルマ曲線について

$x^n+y^n=1$ をアフィン・モデルとする $\mathbb{Q}$ 上の代数曲線 F^n を n 次フェルマ曲線とよぶ. フェルマ曲線の特徴の一つに、自己同型群が非常に大きいということがある. 代数閉体 $/\mathbb{Q}$ 上では F^n の自己同型は $\mathrm{Pic}^0(F^n)\simeq \mathrm{Jac}(F^n)$ の自己同型に自然にのびる. このことは $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathrm{Jac}(F^n))$ が大きいことを意味し、実際に $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathrm{Jac}(F^n))\otimes\mathbb{Q}$ には $\mathbb{Q}$ 上定義された巾等元が沢山ある.

ζ を1の原始 n 乗根とし、$(x,y)\mapsto(\zeta^j x,\zeta^k y)$ からひきおこされる F^n の自己同型を $\phi_{j,k}$ とする (以下 j,k,r,s,a,b 等は $\mathrm{mod}\ n$ で考える). F^n を $\mathbb{C}$ 上で考えると $H^0(F^n,\Omega^1)$ の底として $\{\eta_{r,s}\ ;\ 0<r,s<n,\ r+s<n\}$ がとれる、但し $\eta_{r,s}=x^{r-1}y^{s-1}\dfrac{dx}{y^{n-1}}$ とする. F^n には自明な $\mathbb{Q}$ 有理点があるから標準写像 $F^n\xrightarrow{\varphi}\mathrm{Jac}(F^n)$, $\varphi(P)=(\cdots,\int^P\eta_{r,s},\cdots)\ \mathrm{mod}$ 周期は $\mathbb{Q}$ 上定義される. $\phi_{j,k}$ は $\mathrm{Jac}(F^n)$ の自己同型 $\lambda_{j,k}$ に延長されて、共に $\mathbb{Q}(\zeta)$ 上定義されている. $\{\lambda_{j,k}\}\simeq\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の指標 $\chi_{a,b}$ を $\chi_{a,b}(\lambda_{j,k})=\zeta^{aj+bk}$ で定める. このとき

$$pr_{a,b}:=\sum_{j,k\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} tr_{\mathbb{Q}(\chi_{a,b})/\mathbb{Q}}(\chi_{a,b}(\lambda_{j,k}))\cdot\lambda_{j,k}\in\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathrm{Jac}(F^n))$$

は $\mathbb{Q}$ 上定義された巾等元で $n^2=\sum_{(a,b)}pr_{a,b}$ が成立つ. ここで $\sum_{(a,b)}$ は $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ が $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ へ $t\cdot(a,b)=(ta,tb)$ で作用するときの各 orbit から代表元 (a,b) を選んで加えるものとする.[17)]

---

17) 文献 14) を参照.

$A_{a,b} = pr_{a,b}(Jac(F^n))$ とおくと $A_{a,b}$ は $\mathbb{Q}$ 上のアーベル多様体で $Jac(F^n)$ と $\prod_{(a,b)} A_{a,b}$ は $\mathbb{Q}$ 上で isogeny となっている. この事実は $Jac(F^n)/\mathbb{Q}$ の Mordell-Weil rank を求める過程で D.K. Faddeev によって1960年に発見された.[18]

さて、$F^n_{a,b}$ を $y^n = (-1)^c x^a(1-x)^b$, $a+b+c=0$, をアフィン・モデルとする $\mathbb{Q}$ 上の代数曲線とする. $F^n_{a,b}$ をフェルマ曲線とよぶ人もいる. このとき $A_{a,b}$ は $Jac(F^n_{a,b})$ と isogeny となる. アーベル多様体の離散付値環上の reduction が stable かどうかは isogeny によらないので $Jac(F^n)$ の安定還元を求める問題は個々の $Jac(F^n_{a,b})$ の安定還元を求めることに帰着される. 筆者は $n=p\geq 3$ の場合に初等的な方法で $F^p_{a,b}$ の安定還元を求めたが、独立に Coleman と McCallum が一般の n について $F^n_{a,b}$ の安定還元を求めるアルゴリズムを見つけた. 一方、McCallum は 1982年に、$n=p$ のときの　と $F^p_{a,b}$ の $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 上の極小モデルを計算している.[19]

以下 $F^p_{a,b}$ の安定還元から F^p の安定還元を求める方法をスケッチする. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ への $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$-orbit の代表元として $(a,b)=(1,1)$, $(2,1),\cdots,(p-2,1)$ がとれる. $F^p_{s,1}$ $(1\leq s\leq p-2)$ を C_s と略記する. 各 C_s は種数が $\frac{p-1}{2}$ で $Jac(C_s)$ は $K=\mathbb{Q}(\zeta_p)$ に虚数乗法をもつ. s に応じて K に CM 型が定まる.

18) D.K. Faddeev, Group of divisor classes on ···, Soviet Math. Dokl. 1, 1960, 1149-.

19) W. McCallum, The degenerate fiber of the Fermat curve, Prog. in Math. 26, 1982, 57-70.

F^n の射影モデル $X^n+Y^n+Z^n=0$ には X, Y, Z の置換として 3次対称群 $\mathfrak{S}_3$ が作用していることに注意すると、集合 $\{C_1, \dots, C_{p-2}\}$ に $\mathfrak{S}_3$ が作用していることが分かる。実際、s を $\mathbb{F}_p-\{0,1\}$ の元と考えて、$s \mapsto \frac{1}{s}$, $s \mapsto 1-s$ が $\mathfrak{S}_3$ を生成する。$\frac{1}{s}$ を代表する整数 $\langle \frac{1}{s} \rangle$ を $1 \leq \langle \frac{1}{s} \rangle \leq p-1$ とすると、C_1, $C_{\langle \frac{1}{p-2} \rangle}$, C_{p-2} は全て $\mathbb{Q}$ 上で超楕円曲線 $y^2=4x^p-1$ に同型である。$\{C_1, \dots, C_{p-2}\}$ への $\mathfrak{S}_3$-orbit には元の個数が 6, 3, 2 のものがある。上の例は 3元 orbit の例である。2元-orbit については、$p \equiv 1 \pmod 3$ のとき $s^2+s+1 \equiv 0 \pmod p$ に整数根 ω_1, ω_2 が存在し、$\{C_{\omega_1}, C_{\omega_2}\}$ が 2元-orbit である。実は $\mathrm{Jac}(C_{\omega_i})$ は $\mathbb{Q}$ 上で 3個の互に isogeny なアーベル多様体の直積に isogeny で分解する。

また、McCallum によると、s が $(s+1)^p-s^p-1 \equiv 0 \pmod{p^2}$ の解になっているとき C_s は Hasse の意味で tame, そうでないとき wild である。2元 orbit の C_ω はいつも tame であるが そうでない (非自明な) tame な C_s が不思議な分布をして存在する。[20] これらは CM 型が変ると、同じ CM 体を虚数乗法にもっていても性質が異なる、ことの例となっていることに注意する。

さて、C_s は $k_s=\mathbb{Q}\left(\sqrt{1-\zeta_p}, \sqrt[p]{\frac{s^s}{(s+1)^{s+1}}}\right)$ まで持ちあげると、いたる所 good な reduction をもち p 上の reduction は Artin-Schreier 型の超楕円曲線 $v^2=u^p-u$ となることが分かる。k_s, $s=1, \dots, p-2$ の合成体を k とすれば、k 上で $\mathrm{Jac}(F^p)$ と F^p の安定還元が得られる

20) REDUCE を使って計算することができる。

はずである.

Hürwitz の種数公式を用いると $F^p \to C_s$, $(x,y) \mapsto (x^p, x^s y)$ は p次の不分岐ひふくで、これらと自然に可換な $Jac(F^p) \to \prod_{s=1}^{p-2} Jac(C_s)$ は p次の isogeny となることが知られている. これらを $\mathcal{O}_k$ 上の極小モデル、Néron モデルにのばして、そこでの閉ファイバーを考察する.

$Jac(F^p)$ は k上でいたる所 good reduction であるから F^p の p上での reduction (以下 ¯ で表わす). $\overline{F^p}$ は compact型、即ち双対グラフは木型、である。もし F^p が p上 good なら H. Langeの結果[21] により $\overline{F^p} \to \overline{C_s}$ は p次の不分岐写像となる. しかるに Artin-Schreier 型の超楕円曲線の p-rank は零であるから、このような写像は存在しない。$\overline{F^p}$ は、従って、非特異ではありえない。$\overline{F^p}$ から各 $\overline{C_s}$ への射影が全射であることから $\overline{F^p}$ には少なくとも p−2 個の、算術種数は小さくとも $\frac{p-1}{2}$ の、成分があることが分かり、$\overline{F^p}$ の算術種数が $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ であることを考慮すると $\overline{F^p}$ には各 $\overline{C_s}$ $(s=1,\cdots,p-2)$ と同型な成分 $\overline{F^p_s}$ が一つづつあり、その他は有理曲線であることがわかる.

一方 $C_s : y^p = x^s(1-x)$ へ $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が $y \mapsto \zeta y$ で作用し、これを極小モデルへ延長して $\overline{C_s}$ に制限すると, $\overline{C_s} : v^2 = u^p - u$ には $u \mapsto u+1$ で作用する. この作用は $u = \infty$ のみを固定点とする. 非特異曲線と同様に、安定曲線 C の自己同型は $Pic^0(C)$ の自己同型へのびることが知られている。今 $Pic^0(\overline{F^p})$ は $\overline{Jac(F^p)}$ と等しいから、$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は

21) H. Lange, Kürven mit rationaler Abbildung, Journal für Math. 295, 1977, 80-115

各 s 毎に F^p に作用し、成分 F_s^p 上で無限遠点を固定点にもつことが分かる。このことから 各 F_s^p は $\mathrm{Jac}(F^p)$ 内では無限遠点のみを共通点として交わっていることが分かるので この点を P とする。各 F_s^p は P において transversal に交わっていることから $\mathrm{Jac}(F^p)$ への写像で blowing down される F^p の有理曲線成分は 唯一つであって、各 F_s^p の無限遠点を通るものに限ることがわかる。

§5. おわりに。

整数論への応用は別の機会にしたいと思います。Coleman と McCallum は $F^n_{a,b}$ の安定還元を用いて Jacobi Sum Hecke Character の conductor の計算をしていますが 東大の加藤和也氏が別の方法で conductor を求めています。この同じシンポジウムの報告をごらん下さい。

以上